Precessão de Thomas

Pedro Diniz

Sumário

- Introdução;
- Descrição do efeito;
- Interpretação geométrica;
- Aplicação: Átomo de Hidrogênio;

Introdução

- 1925 - Uhlenbeck e Goudsmit : Spin

Zeeman

Estrutura fina

- 1926 – Thomas : Efeito relativístico

Llewellyn Thomas

Precessão de Thomas

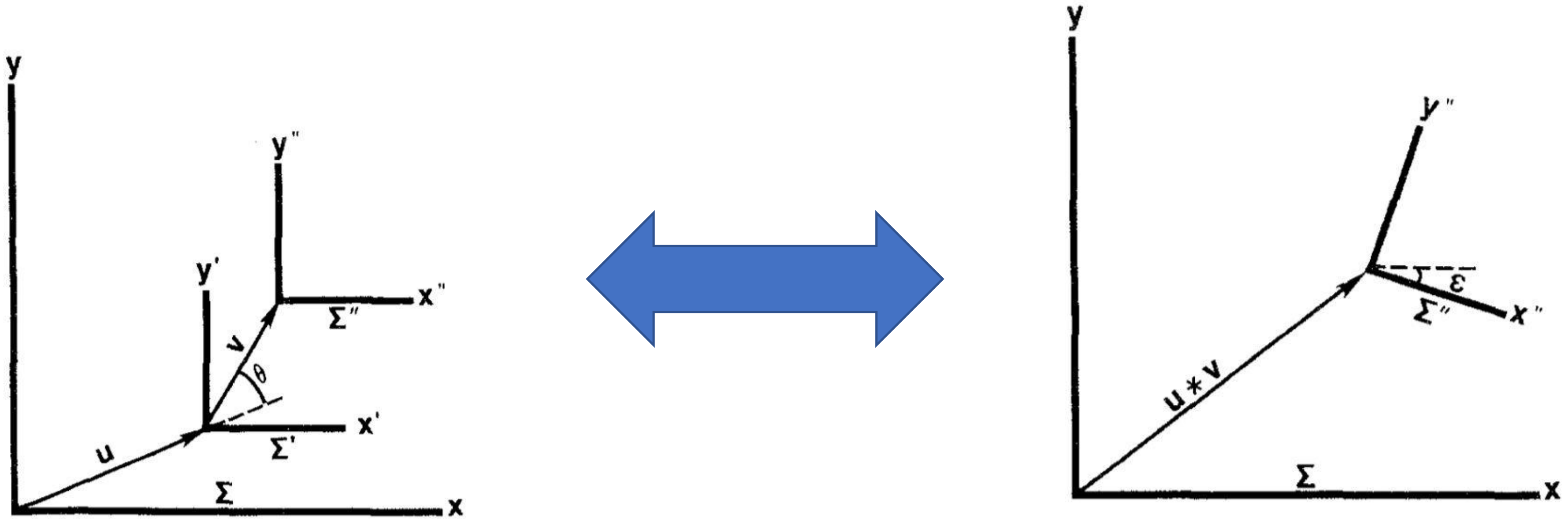
- Efeito de precessão do momento angular de um sistema se movendo ao longo de uma trajetória curva.

Frequência de precessão de Thomas:

$$\omega_{Thomas} = (\gamma - 1)\left|\frac{(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a})}{v^2}\right|$$

Rotação de Thomas

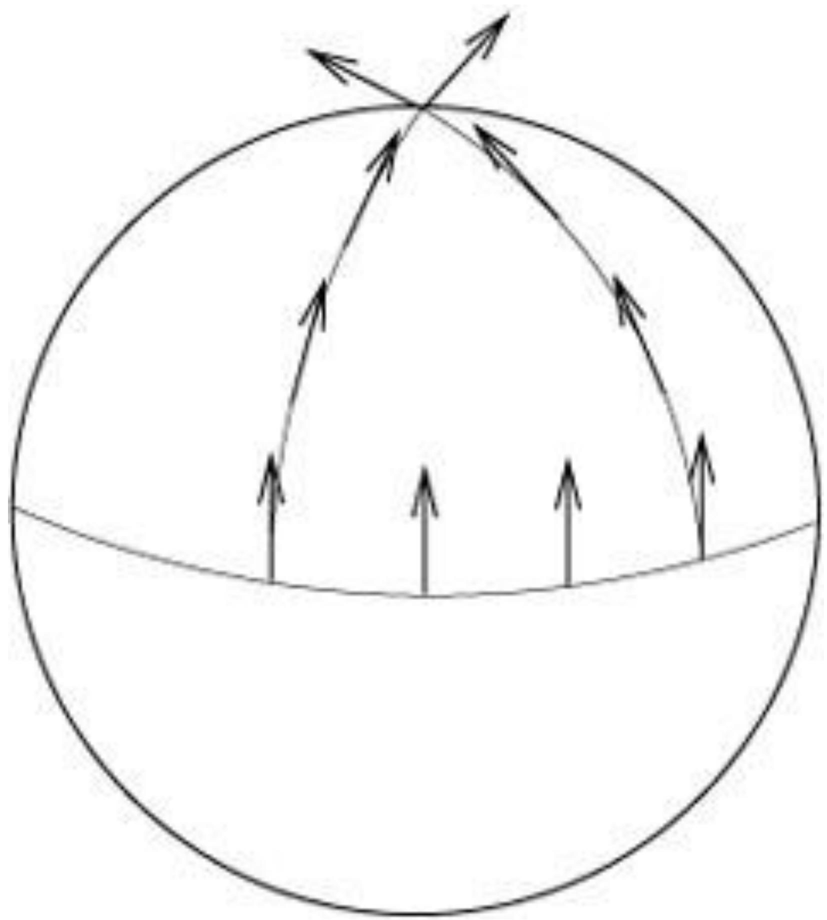
- A composição de dois boosts equivale à composição de um boost com uma rotação espacial:



Fase Geométrica

- Transporte paralelo;
- Teorema de Gauss-Bonnet:

Fase geométrica = Área



Transporte paralelo numa superfície esférica

Espaço de velocidades

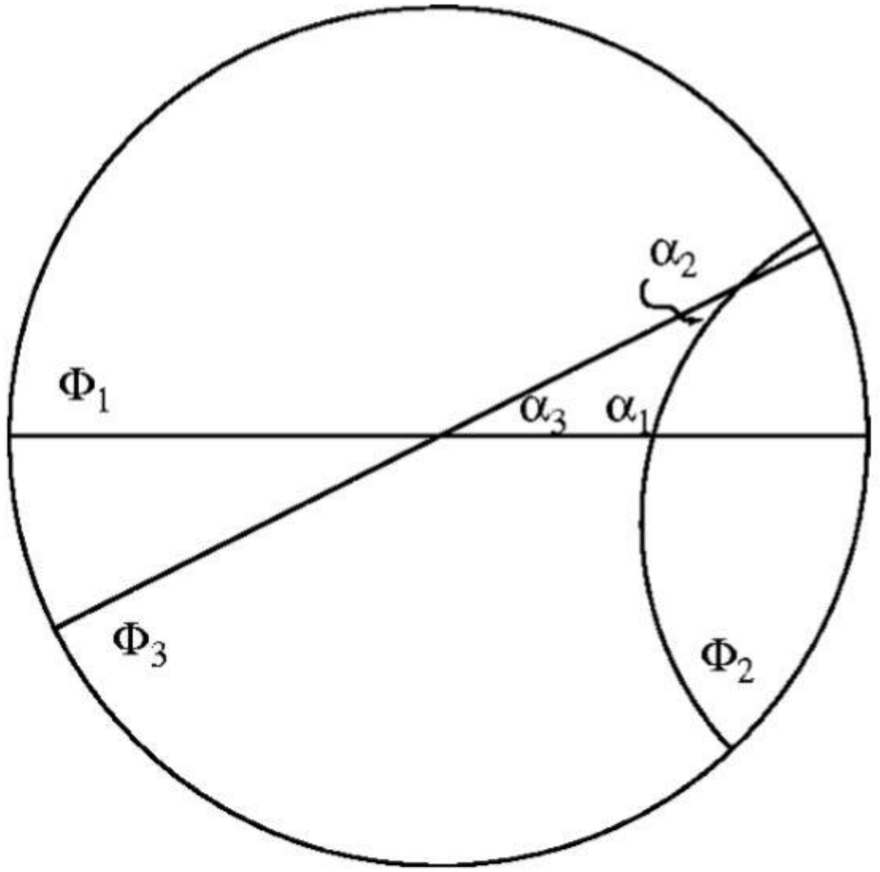
- Elemento de linha:

$$ds^2 = (\frac{2}{1 - r^2})^2(dx^2 + dy^2)$$

- Coordenadas e ângulos:

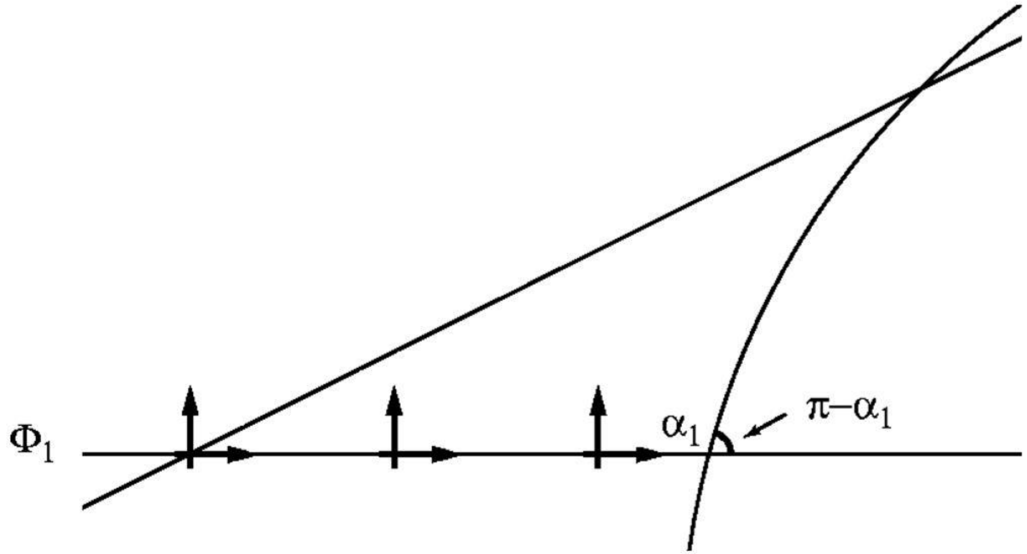
$$x = (\frac{\gamma}{\gamma + 1})\beta_x \qquad \arctan\frac{v_x}{v_y} = \arctan\frac{x}{y}$$

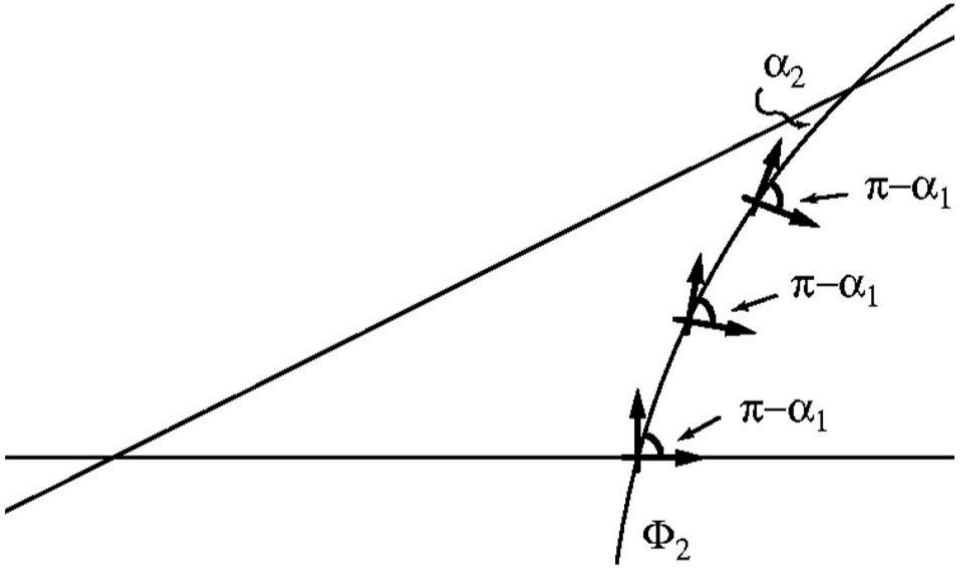
- Geodésicas representam boosts



Espaço de velocidades relativístico

Rotação de Thomas





Transporte paralelo no espaço de velocidades

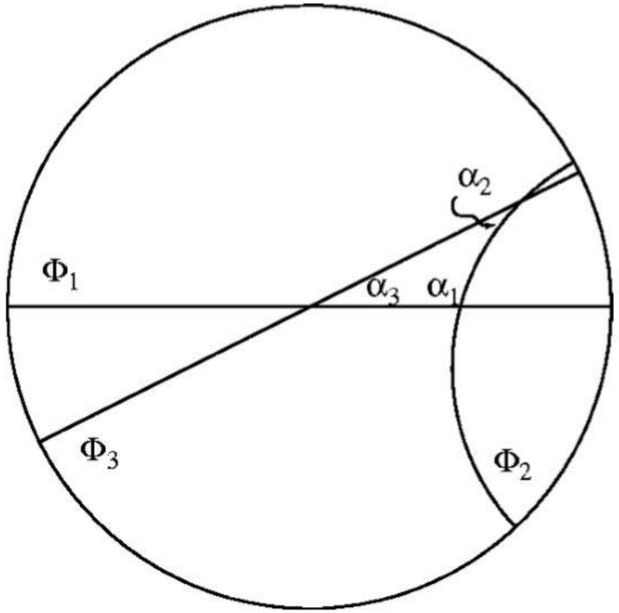
Fase geométrica = Área = Integral de linha

Teorema de Green:

$$\boxed{\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int\int_\Sigma \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \hat{n} d\sigma}$$

Escolha conveniente de **F**

$$\boxed{\int_{\Phi_2} (\frac{2r^2}{1-r^2}) d\theta = Area(\Sigma)}$$



Obtenção da frequência de Thomas

$$|\oint_C (\frac{2}{1-r^2})(xdy - ydx)| = \oint_C (\frac{2}{1-r^2})|(\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{r}) \cdot \hat{\boldsymbol{k}}|$$

$$\downarrow$$

$$\oint_C (\frac{2r^2}{1-r^2})|\frac{(\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{r}) \cdot \hat{\boldsymbol{k}}}{r^2}| = \oint_C (\gamma - 1)|\frac{(\boldsymbol{v} \times d\boldsymbol{v}) \cdot \hat{\boldsymbol{k}}}{v^2}|$$

$$\downarrow$$

$$d\psi = (\gamma - 1)|\frac{(\boldsymbol{v} \times d\boldsymbol{v})}{v^2}| = (\gamma - 1)|\frac{(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a})}{v^2}|dt$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\frac{d\psi}{dt} := \omega_{Thomas} = (\gamma - 1)|\frac{(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a})}{v^2}|}$$

Aplicação: Átomo de Hidrogênio

Força sentida pelo elétron:

$$e\boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r}\frac{dV(r)}{dr}$$

Frequência de Thomas:

$$\omega_{Thomas} = (\gamma - 1)\left|\frac{(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a})}{v^2}\right|$$

$$\omega_{Thomas} \approx \frac{-\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}}{2mrc^2}\frac{dV}{dr} = \frac{-1}{2rm^2c^2}\boldsymbol{L}\frac{dV}{dr}$$

Aplicando um campo magnético

Momento magnético do elétron:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{ge}{2mc}\boldsymbol{s}$$

Torque no referencial de repouso

$$\boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B}'$$

Transformação de Lorentz do campo

$$\boxed{\boldsymbol{B}' = \gamma(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{B})}$$

Primeira ordem em v/c

$$\boxed{\boldsymbol{B}' \approx \boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}}{c}}$$

Torque entre referenciais

Relação entre a taxa de variação de vetores em referenciais que apresentam um movimento relativo de rotação:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B}' + \boldsymbol{\omega}_{Thomas} \times \boldsymbol{s}$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathcal{U} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}' + \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\omega}_{Thomas}$$

Correção na energia

$$\boxed{\mathcal{U} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}' + \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\omega}_{Thomas}}$$

$$\Big\downarrow \quad \boldsymbol{B}' \approx \boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}}{c}$$

$$\boxed{\mathcal{U} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \left(\boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{E}\right) + \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\omega}_{Thomas}}$$

Energia

$$\mathcal{U} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \left(\boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{E}\right) + \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\omega}_{Thomas}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{Thomas} \approx \frac{-\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}}{2mrc^2} \frac{dV}{dr} = \frac{-1}{2rm^2c^2} \boldsymbol{L} \frac{dV}{dr}$$

$$\boxed{\mathcal{U} = -\frac{ge}{2mc} \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{B} + \frac{(g-1)}{2m^2c^2} (\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{L}) \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}}$$

$$\mathcal{U}_{sem\ precessao} = -\frac{ge}{2mc} \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{B} + \frac{g}{2m^2c^2} (\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{L}) \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}$$

Conclusão

- Referenciais que se movem ao longo de trajetórias curvilíneas rotacionam segundo a precessão de Thomas.
- Este efeito pode ser interpretado como um efeito de fase geométrica. Sob essa visão a obtenção da frequência de Thomas é simples.
- É notável como um efeito relativístico tão obscuro pode ter tanta relevância prática, como foi mostrado na análise da energia de um elétron no átomo de hidrogênio.

Referências

- H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko. Classical Mechanics. Addison Wesley, 2002.
- D. Griffiths. Introduction to Electrodynamics. Prentice Hall, 1999.
- J. Jackson. Classical Electrodynamics. Wiley, 2012.
- J. A. Rhodes and M. D. Semon. Relativistic velocity space,wignerrotation,andthomasprecession. American Journal of Physics, 72(7):943–960, 2004.
- K. Tapp. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2016.
- L. H. Thomas. The motion of the spinning electron. Nature, 117(2945):514–514, 1926.